Varianta 9

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul natural x pentru care $1+3+5+\ldots+x=225$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m ştiind că graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanţa 3.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(2^{-x+1}+1\right)=x$.

5p **4.** Să se arate că $C_{17}^{3}>C_{17}^{15}$

5p **5.** Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\ldots+\sin^2 90^\circ=\dfrac{91}{2}$

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$ trei puncte din plan şi matricea $M=\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că, dacă A, B, C se află pe dreapta de ecuaţie $y=2x$, atunci $\det(M)=0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă triunghiul ABC este dreptunghic şi are catetele de lungime 1, atunci $\det(M)=\pm 1$.

5p **c)** Să se arate că, dacă matricea M este inversabilă, atunci suma elementelor matricei M^{-1} este 1.

2. Se consideră mulţimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -3b & a\end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $X\in A$ şi $Y\in A$, atunci $X+Y\in A$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X\in A, Y\in A$ şi $XY=O_2$, atunci $X=O_2$ sau $Y=O_2$.

5p **c)** Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f este crescătoare.

5p **b)** Admitem că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ ecuaţia $f(x)=n$ are o soluţie unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$, unde şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ a fost definit la **b)**.

2. Fie funcţiile $f,g_n:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $g_n(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g_2(x))dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)dx\leq\dfrac{1}{2^n},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot 2^n}\right)=\ln 2$.