Varianta 6

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul al doilea ştiind că $f(-1)=1,\ f(0)=1,\ f(1)=3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $(0,\pi)$ ecuația $\sin 3x=\sin x$.

5p **4.** Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2,4,6,8\}$?

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1,2)$, $B(2,-2)$ şi $C(4,6)$. Să se calculeze $\cos B$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $C=\dfrac{\pi}{6}$ şi $AB=6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}\in S_5$.

5p **a)** Să se calculeze σ^{2009}.

5p **b)** Să se dea exemplu de o permutare $\tau\in S_5$ astfel încât $\tau\sigma\neq e$ şi $(\tau\sigma)^2=e$.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru orice $\tau\in S_5$, există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\tau^p=e$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{C}$, x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3-2x^2+2x-a=0$ şi determinantul

$$\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_3 & x_1 & x_2\\ x_2 & x_3 & x_1\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Pentru $a=1$, să se determine x_1, x_2 şi x_3.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x\cdot\ln x}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=f(x)(1+\ln x),\forall x>0.$

5p **b)** Să se determine valoarea minimă a funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$.

2. Se consideră, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, funcțiile $f_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x}$ şi $g_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$,

$g_n(x)=1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{2n-1}+f_n(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\le\int_0^1 f_n(x)dx\le\dfrac{1}{2n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right),n\in\mathbb{N}.$