Varianta 2

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to(1,\infty)$, $f(x)=e^x+1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a\neq b$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1), B(2,0), C(0,6)$.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=aA$.

5p **b)** Să se calculeze $(A-A^t)^{2009}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^5=A,\ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pentru a,b din mulțimea $M=[0,\infty)$ se defineşte operația $a*b=\ln(e^a+e^b-1)$.

5p **a)** Să se arate că dacă $a,b\in M$, atunci $a*b\in M$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, să se determine $a\in M$ astfel încât $\underbrace{a*a*...*a}_{\text{de } n \text{ ori } a}=2a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $a_1\in(0,1)$ şi $a_{n+1}=a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $a_n\in(0,1),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat de $b_n=a_1^2+a_2^2+...+a_n^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0, x=1, Ox$ şi graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x+1)f(x)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.