

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^3$ este întreg.
- 5p 2. Să se determine imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-2x+1} = 5$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr \overline{ab} din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 5x - 4y + 1 = 0$.
- 5p 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC știind că $AB = 6$, $B = \frac{\pi}{4}$ și $C = \frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze $A^2 - B^2$.
- 5p b) Să se calculeze $\det(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4)$.
- 5p c) Să se arate că ecuația $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{Z})$.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ și $g = X^2 - 1$.
- 5p a) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g .
- 5p b) Să se calculeze $(1-x_1) \cdot (1-x_2) \cdot (1-x_3) \cdot (1-x_4)$.
- 5p c) Să se calculeze $g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot g(x_3) \cdot g(x_4)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $x_1 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 3x_n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a) Să se arate că $x_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p b) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.
- 5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$.
2. Se consideră o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_0^\pi x^2 f(x) dx$.
- 5p b) Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 5p c) Să se arate că $\int_1^\pi f(x) dx \leq \cos 1$.