Varianta 15

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa Ox în punctul $(1,0)$ şi trece prin punctul $(0,2)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $\left[0,2\pi\right)$ ecuația $\sin x+\cos x=0$.

5p **4.** Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2,2)$ şi este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2,1)$, $D(-1,-3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a, b, c\in\mathbb{Z}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $a+b+c\neq 0$ şi A nu este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$, atunci $a=b=c$.

5p **c)** Să se arate că sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax+by+cz=\dfrac{1}{2}x\\ cx+ay+bz=\dfrac{1}{2}y\\ bx+cy+az=\dfrac{1}{2}z\end{cases}$ admite numai soluția $x=y=z=0$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^4-5X^2+5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$, se consideră funcția $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n-nx+1$.

5p **a)** Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $[0;1]$ şi strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f_n(x)=0,\ x>0$ are exact două rădăcini $a_n\in(0,1)$ şi $b_n\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde a_n s-a definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ şi $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $I_0=\dfrac{\pi}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $I_{2n}=\dfrac{1}{2n-1}-I_{2n-2}, \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+...+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}\right)=I_0$.