Varianta 12

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{7}{6}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\cos 2x=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $a>0$ știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.

5p **5.** Să se determine ecuația simetricei dreptei $d:2x-3y+1=0$ față de punctul $A(-3,4)$.

5p **6.** Ştiind că $\operatorname{ctg} x=3$, să se calculeze $\operatorname{ctg} 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^2+X+1$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2 și

$g=aX^2+bX+c$, cu $a\neq 0$. Fie matricele $A,V\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A=\begin{pmatrix} c & b & a\\ a & c & b\\ b & a & c\end{pmatrix}$ și $V=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & x_1 & x_2\\ 1 & x_1^2 & x_2^2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(V)=3(x_2-x_1)$.

5p **b)** Să se arate că $A\cdot V=\begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2)\\ g(1) & x_1g(x_1) & x_2g(x_2)\\ g(1) & x_1^2g(x_1) & x_2^2g(x_2)\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $\det(A)=0$ dacă şi numai dacă $a+b+c=0$ sau $a=b=c$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f(x)=x^4+\hat{4}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})$ și $f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p **c)** Să se descompună polinomul $X^4+\hat{4}X\in\mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$.

5p **a)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ unde $x_n=f(1)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+...+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ este divergent.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(2)$.

5p **b)** Să se demonstreze relația $f(x)\leq\frac{1}{x}$, $\forall x>1$.

5p **c)** Să se demonstreze relația $f(x+1)=xf(x)-\frac{1}{e}$, $\forall x>1$.