Varianta 10

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Ştiind că $z \in \mathbb{C}$ şi că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul întâi, pentru care $f(f(x)) = 2f(x) + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1) - \lg 9 = 1 - \lg x$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(3 + \sqrt[3]{3}\right)^{10}$.

5p **5.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, ştiind că $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,-1)$.

5p **6.** Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ este obtuz.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutările $e, \alpha \in S_3$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze α^3.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\alpha^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este permutare impară.

2. Fie inelul $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se dea exemplu de un număr complex z astfel încât $z \notin \mathbb{Z}[i]$ şi $z^2 \in \mathbb{Z}[i]$.

5p **b)** Să se determine elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}[i]$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea $H = \{(m+n) + (m-n)i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}[i]$ în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f' este mărginită.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n \leq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} I_n$.