Varianta 1

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+...+x=231$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-5x+3\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty),\ f(x)=x^2+1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii *A*, care conțin elementul 1.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$ și $b\ne 0$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $u,v\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} u & v\\ v & u\end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n\\ y_n & x_n\end{pmatrix}$, unde $x_n=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_7$ și polinomul $f=X^6+aX+\hat{5}\in\mathbb{Z}_7[X]$.

5p **a)** Să se verifice că, pentru orice $b\in\mathbb{Z}_7$, $b\ne\hat{0}$, are loc relația $b^6=\hat{1}$.

5p **b)** Să se arate că $x^6+\hat{5}=(x^3-\hat{4})(x^3+\hat{4}),\ \forall x\in\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $a\in\mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră numărul real $a>0$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ax$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine $a\in(0,\infty)$, știind că $f(x)\ge 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f*, axa Ox și dreptele de ecuații $x=\frac{1}{e}$ și $x=e$.